

La capillarité selon Laplace et son lieu avec les mathématiques et la physique

LEE Ho-Joong

Centre d'Histoire des Sciences et des Techniques
Département Mathématique Université de NANTES

라플라스의 모세관현상 이론에서의 수학과 물리학의 결합

이 호 중

낭트대 수학과 과학기술사센터

요 약

물리현상의 수학화는 라플라스 물리학의 특징적 要諦라고 할 수 있고 그의 모세관 이론도 이의 범주 내에서 이해하여야 한다. 화학친화력(chemical affinity)이라고 하는 분자물리학적 의미의 緣由를 가진 라플라스의 모세관 이론은 그의 「천체 역학」(*Mécanique céleste*) 제 4권의 부록에서 143페이지에 걸쳐 그 수학을 실험물리학에 결합시킨 수리물리학의 일면을 보여준다. 이 논문은 이에 대해서 다루었다.

먼저 I 절에서는 라플라스 때까지의 모세관현상 이론을 연대기 형식으로 요약하고, 프랑스 혁명 전후의 라플라스 물리학이 태동된 역사적 배경, 수리물리학, 실험물리학 및 화학의 맥락과 라플라스 이전의 계몽주의적 뉴턴주의자들과의 관계를 다루었다. 특히 수학의 응용에 대한 방법론, 물체의 상호작용과 천체모형과의 유비 관계를 다루었다.

II 절은 라플라스 이론의 핵심이라고 볼 수 있는데, 만유인력의 작용모델이 어떻게 일반곡면과 결합하는가를 설명한다. 즉 라플라스는 구 표면 위에서 단위부피와 한 점과의 상호작용을 포텐셜 함수로 표현하고 변수변환을 통해서 대칭식을 유도하는 바, 이를 통해 그의 곡면에 대한 접근 태도에서의 획기적인 기하학적 반성을 엿볼 수 있다. 그 후 라플라스는 구면식으로부터 더 일반적인 기하학적 개념이 내포된 회전타원면식으로 확장한 다음, 보다 보편적 의미의 타원형 二階準線形 偏微分 方程式, 즉 오일러-라그랑주(Euler-Lagrange)식을 모세관 내의 유체 평형식에 삽입했다. 그 결과 얻어진 식은 고전적 해밀턴(Hamiltonian)식과 유사했다. 그리고 모세관 내의 유체의 오르고 내림을 표현하는 이 편미분 방정식을 푸는 데 있어 라플라스는 라그랑주가 개발한 극치문제에서 사용했던 변분법을 이용하였다. 원래 오일러-라그랑주식은 르니에(Meusnier)에 의하여 기하학적으로 해석되었고, 몽주(Monge)는 1776년에 곡면의 극소조건에서 평균곡률이 모든 점에서 0이 되는 점으로 정의하고 모세관 내의 액체 표면을 균일하게 신장된 膜(membrane)으로 표현하여 영(Young)의 표면장력 이론에 직접적 영향을 주었다.

다음 III 절에서는 라플라스가 곡면이라는 중요한 수학적 개념을 여러가지의 실험적 조건, 즉 다양한 경계조건에서의 오일러-라그랑주식을 특수해로 하여 유체의 높낮이나 모형을 접면각으로 표현한 것을 다룬다. 그는 이것을 보통모세관, 이중모세관, 두 평판(平板), 한쪽 끝이 막힌 두 평판, 양면이 뚫린 원추관 등의 내부에서의 유체들에 적용하였다.

한마디로 말해서 라플라스 모세관이론은 뉴턴적 사고방식에 입각하여 미분방정식으로부터 유도되는 곡면의 곡률이라는 기하학적 표현이 압력과 장력이라는 물리적 표현과 결합하는 라플라스 물리학의 일부분을 보여준다고 하겠다.

I. Une idée d'application mathématique à la physique

1. Resume de l'historique de la théorie capillarité jusqu'à Laplace

Le mot "capillarité" vient du latin "*capillus*", qui signifie cheveu. Le problème de la capillarité, surtout aux début de l'apparition de la théorie, est fortement lié à d'autres problèmes de philosophie naturelle. L'étude du mouvement des eaux avait toujours exercé une attraction particulière, car il impliquait des problèmes d'importance considérable, par exemple l'augmentation périodique du niveau de la mer près des côtes, le mécanisme de la montée de la sève dans les plantes, la formation des sources au sommet des montagnes, la courbure des surface des liquides en repos au contact avec des objets solides, la pellicule d'eau qui s'étend entre les mailles d'un filet (formation d'une surface minimale sur une nasse), l'attraction et la répulsion apparente entre des petits objets flottants sur l'eau: Un autre exemple, d'importance fondamentale pour ses connections avec les différentes théories sur la forme de la Terre, concernait l'observation des petites gouttes d'eau ou de mercure.

A partir de la sphéricité de la surface d'une petite goutte d'eau, en raisonnant par analogie, il était facile de voir dans ces phenomenes des modèles de grandes masse d'eau, à partir desquelles on pouvait donner une explication de la forme sphérique de la terre Comme l'a remarqué Dubem. Celui-ci, spécialiste de la capillarité aussi bien que de l'histoire des science dit "*La rotondité des gouttes de rosée prouvait la sphéricité de l'ocean*" (1). Même Laplace dans un supplément de *Mécanique céleste* avait répété qu'un lien existait entre l'ellipsoïde et la surface de courbure capillaire! Comme on avait aperçu à l'époque que la terre était une figure ellipsoïdal aplatie, il étaient très fier de l'analogie entre ellipsoïde et la surface capillaire. Cette fameuse ellipsoïde aboutit à des études rigoureuses à la fin du 19ème et au début du 20ème siècle de Minkovski et Einstein(2).

Emmer esquisse les travaux des arabes du XIIème siècle, les recherches de Leonardo da Vinci et celles de Niccolo Aggiunti sur les phénomènes capillaires(3). En particulier, on trouve des références à l'observation des phénomènes capillaires dans un livre du XIIème siècle intitulé *Kitab Mizan al-Hikma* (*Le livre de la balance de sage*). Il semble que le texte ait été écrit pendant les années 1121-1122; il se compose de huit livres(maqalat) divisés en 50 chapitres(abwab)(4). Les thèmes traités concernent l'usage et la construction d'une balance hydrostatique, les théories hydrostatiques qui la gouvernent, la détermination du poids

1) Michèle Emmer, "Histoire des théories sur l'attraction capillaire: Des origines au XVII", *Cahiers D'histoire de philosophie des Sciences* 20(1987), 256-262. Emmer a écrit un article intéressant sur la période arabe et la Renaissance. Voir aussi, P. Duhem, *Etude sur Leonardo da Vinci, ceux qui ont lu*, Première Série (Paris: Ed. Herman, 1906), p.71.

2) E. Borel, *L'espace et le Temps* (Paris: Felix Alcan, 1922), Préface, p.42 et pp. 202-204; Lucien Fabre, *Les théories d'Einstein*(Payot, 1921), pp.91-95 et pp. 155-156; Lewis Pyenson, *The Young Einstein-The advent of Relativity* (Adam Hilger, 1985), pp.80-94.

3) M. Emmer, *op. cit.*, à la note (1), 258-260.

4) On peut trouver une explication remarquable et une excellente bibliographie sur *Kitab Mizan al Hikma* dans le *Dictionary of Scientific Bibliography* Vol VII, 335-351.

spécifique de plusieurs liquides et solides. A propos de cette dernière partie, Al-Khazini se déclare redevable à Al-Biruni. Dans le troisième livre Al-Khazini reproduit quelques morceaux d'un livre perdu de Al-Biruni où l'on parle de poids spécifiques et d'équivalence entre différentes substances et le poids égal en volumes d'eau.

Au début du 16^{ème} siècle dans une oeuvre scientifique, Leonardo da Vinci étudia des phénomènes liés à la tension superficielle. L'oeuvre "*Scienza delle acque*" est un des thèmes sur lequel Leonardo travailla avec un grand enthousiasme, en étudiant avec originalité les nombreux aspects dans lesquels l'eau comme élément se manifeste dans la nature. Les investigations hydrauliques de Leonardo, ne pouvaient pas rester pourtant exclus de ces phénomènes qui, soit parce qu'ils apparaissent souvent en contradiction avec certains principes physiques, soit parce qu'ils étaient en effet utilisés comme modèles pour l'étude d'autres problèmes, qui avaient déjà attiré l'attention des auteurs classiques malgré une opinion d'ambiguïté(5). Au début de 17^{ème} Siècle, Niccolo Aggiunti, Professeur de mathématiques à Pisa arriva à une remarquable conscience des phénomènes capillaires, affirmant "*Lo scoprimento del moto occulto dell'acqua risolvera molti problemi*"(6).

La véritable étude capillaire à considérer est celle Edmé Mariotte, savant français, connu Comme physicien expérimental, mécanicien, hydraulicien, opticien et philosophe naturaliste. Il observait la concavité dans le flacon partiellement rempli de liquide et la convexité lorsque le flacon était entièrement rempli. Il donnait l'explication sur l'attraction et la répulsion de deux balles selon le mouillage. Mariotte attribuait ces effets principalement à la gravitation, mais l'explication était purement qualitative. Par manque de notion sur la tension superficielle, l'explication était fautive(7).

En 1670 Borelli étudia quelques points rattachés à la science de la capillarité par adéquation de la proportionnalité de la hauteur d'ascension capillaire au diamètre du tube et la non-relation avec la pression atmosphérique. En 1704, Newton introduisit l'hypothèse de l'attraction moléculaire aux phénomènes capillaires. En 1713, Newton fit exécuter par Hauksbee un certain nombre d'expériences destinées à préciser le caractère de l'attraction moléculaire, la valeur du rayon d'activité moléculaire avec différentes méthodes d'expérimentation. Bergman, un suédois, s'exprime dans ses Opuscules au sujet de l'affinité chimique d'une manière analogue à celle de Buffon. Il lui donne le nom d'attraction élective et la fait dériver de l'attraction universelle. Jurin tenta en 1718 d'établir une théorie de suspension de l'eau dans le tube capillaire, uniquement par les actions du petit anneau formé par les parties du verre très voisines de la ligne où la surface libre du liquide vient rencontrer la surface intérieure du tube.

Clairaut développa la première théorie de la capillarité quantitative basée sur le principe de l'équilibre des canaux. Segner en 1751 montre avec quelques équations algébriques que la

5) M. Emmer, op. cit., à la note (1), p.259 ; G Libri, *Histoire des Sciences Mathématique en Italie, depuis la Renaissance des Lettres jusqu'à la fin du dixseptième siècle* (Paris : Ed. Reonard, 1840), tome III, p.54. Libri attribue à Leonardo la découverte de la capillarité. Voir "Codes Hammer-II codice Hammer di Leonardo da vinci, le acque, la terra, l'universo", catalogue par J. Roberts, Los Angeles. Voir aussi Poggendorff: *Geschichte der Physik* (Berlin, 1879); Traduction française, *Historie de la Physique*, (Paris : Dunod, 1883).

6) N. Aggiunti, "Un libro di problemi vari geometrici e di speculazioni ed esperienze fisiche", Manuscrit, Biblo. Naz. Firenze, Archivio Galileiano, précurseurs.

7) Jacob J. Bikerman, "Theories of capillary attraction", *Centaurus* 19 (1975), 182 – 183.

hauteur de l'ascension du liquide est inversement proportionnelle au diamètre du tube(8). Monge, en 1795, est le premier qui a indiqué d'une façon précise, l'assimilation d'une surface capillaire à une membrane uniformément tendue, assimilation qui forme le fondement de ce que l'on a appelé depuis, la théorie de la tension superficielle des liquides. Young, formidable rival de Laplace, a comparé l'expérience et les résultats de l'idée admise par Monge, et cherchait la cause de la similitude entre la surface d'un liquide et la surface d'une membrane uniformément tendue. Lorsque une membrane flexible est soumise à des forces extérieures qui la distendent, elle est le siège de forces intérieures. Ces forces intérieures admettent un potentiel. En effet cette théorie de la tension superficielle de Young est la même de celle de Laplace car dans la théorie de Laplace s'exprimait implicitement l'expression de Young.

Laplace avait développé un véritable corps de doctrine de la théorie de la capillarité dans son supplément de la *Mécanique céleste* de 143 pages en 1805 et 1807. Il avait déduit de l'hypothèse de l'attraction moléculaire, les lois des phénomènes capillaires en admettant la constance de l'angle de raccordement, et parvient à trouver la relation qui lie la valeur de cet angle aux grandeurs des actions moléculaires du solide et du fluide. Le point de départ de son entreprise était le livre II *Mécanique Céleste "Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes"*, dans lequel il déduit par méthode analytique la conception du potentiel, et il assimilait aux rayons de courbure, des équations de surface.

2. Une idée l'application des mathématiques.

Jusqu'à l'ère révolutionnaire, l'application des mathématiques aux problèmes physiques était l'aspect fondamental de la science notamment en ce qui concerne les sujets de physique générale. C'était souvent le cas pour des problèmes liés à des branches physiques qui semblaient recevoir l'attention des grands géomètres alors que la physique particulière était laissée à la recherche expérimentale(9).

On voit le signe d'un changement de point de vue de la physique. L'intérêt de Laplace pour les aspects expérimentaux de la science, spécialement dans l'étude de la chaleur a grandi rapidement vers 1780.(10) C'était que le fluide impondérable pouvait fournir une explication entièrement acceptable des phénomènes physiques. A ce moment-là, en France, dominaient les newtoniens. On ne mettait pas en doute l'acceptation de la possibilité de l'action des forces à distance, puisque dans tous les cadres de la physique, la tradition newtonienne au XVIIIème siècle brillait par ses succès. C'était juste au moment où l'ami de Laplace, Lavoisier, était en train de prêter attention à l'hypothèse d'un fluide calorique en théorie de la chaleur. C'était seulement juste après que Coulomb produisit quelque plus important travail en électricité et magnétisme, en démontrant le travail qui faisait beaucoup à gagner pour le deux-fluide théorie que Coulomb lui-même appréciait. Laplace faisait

8) J. J. Bikerman, "Capillarity before Laplace: Clairaut, Segner, Monge, Young", *Archive for History of Exact Sciences* 18(1978), 106-110.

9) D. H. Arnold, "The Laplacian Program, The Mecanique of Simeon Denis Poisson; the Evolution and Isolation in France of his Approach to Physical Theory(1800-1840)", *Archive for history of Exact sciences*, 28 (1983), 267-287.

10) Lettre de Laplace à Lagrange, le 21 aout 1783 dans *oeuvres de Lagrange* 14 eme volume(parus 1867-1892), 14, 124.

quelque chose de plus que l'acceptation simple de la légitimité newtonienne qui était couramment entendue à la fin du XVIII^{ème} siècle. C'était la grande réussite de Laplace que de consolider la tradition newtonienne, en offrant son principe sous la forme mathématique, en prenant les problèmes en dehors de la ligne surtout à l'égard de la force à courte distance qui agit à l'échelle moléculaire. Il y a donc eu création d'une physique laplacienne caractéristique à partir d'une origine newtonienne. Le signe d'émergence du futur programme laplacien pouvait être détecté au début de 1796. La première édition de *l'Exposition du Systeme du monde* est publiée cette année-là. Laplace y parle de réfraction optique, d'action capillaire, de cohésion du solide, de propriété cristalline, même de la réaction chimique qui résultait de l'attraction de la force exercée par des particules de corps (moléculaires) :

L'attraction disparaît entre les corps d'une grandeur peu considérable : elle reparaît dans leurs éléments sous une infinité de formes. La solidité, la cristallisation, la réfraction de la lumière, l'élévation et l'abaissement des liquides dans les espaces capillaires, et généralement toutes les combinaisons chimiques(11).

et puis il a prévu à l'avance que on pouvait comprendre la loi qui dirige la force. Du point de vue de Laplace il y avait une bonne raison pour croire que la force moléculaire elle-même pouvait être gravitationnelle; par nature, même ils ne sont pas obéi au simple loi de carée-enverse, la complication qui résultait par l'effet à l'échelle moléculaire, à la façon des molécules individuelles. A travers le XVIII^{ème} siècle, la force moléculaire était usuellement négligée à l'exception des distances très courtes. Elle avait été considérée aussi dans une tradition continue de travail sur l'affinité chimique(12) en particulier chez A.C. Clairaut, George Louis Leclerc de Buffon, qui influencèrent Laplace. Et c'est en examinant leur travail qu'on peut voir plus clairement la continuité entre Laplace et ses précurseurs newtoniens du XVIII^{ème} siècle(13).

Clairaut, par exemple, a attribué l'élévation et la dépression du fluide dans un tube capillaire, la sphéricité de la goutte de fluide, et la déflexion des rayons de lumière à la force gravitationnelle qui devient grande à distance courte (distance moléculaire)(14). Buffon avait déjà discuté d'une force similaire(15). Quoique Clairaut et Buffon étaient fiers d'être appelés newtoniens, ils disaient explicitement que la force moléculaire qu'ils ont postulée était de même nature que celle qui agissait entre les corps célestes, mais ils n'étaient pas fondamentalement d'accord sur la relation entre la force et la distance à l'échelle moléculaire. Le débat était clairement antinomique par la contradiction entre la prédiction et l'observation de l'apogée de la lune. Pour éliminer cette antinomie Clairaut a supposé en 1747, que la loi de la force pouvait contenir un terme inversement proportionnel à la

11) P.S. Laplace, *Exposition du système du monde*, sixième édition (1835), p.323.

12) I. Newton, Query 31 of the *Opticks*, 4th édition(London, 1730), pp.350–382.

13) R. Fox, "The Rise and Fall of Laplacian Physics", *Historical Studies in the Physical Science* 4(1974), 89–136.

14) A.C. Clairaut, "Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle", *Memoires de l'Académie Royale des Sciences pour 1745* (publiés en 1749), 338.

15) C.L.L. de Buffon, "De la nature, seconde vue", (1765) dans son *Histories naturelle générale et particulière*, vol 44 (1749–1804), 13, VII–XV.

quatrième puissance de la distance $\frac{1}{r^4}$, en dehors de termes usuels proportionnels à $\frac{1}{r^2}$ (16). Selon Clairaut ce terme ajouté élimine l'anomalie en question et s'accorde avec l'existence de la force moléculaire qui agit à distance insensible. En invoquant le manque d'élégance et simplicité et craignant une menace contre le système newtonien, Buffon soutenait la loi plus familière en $\frac{1}{r^2}$; puis quelques années plus tard, il admettait que ce genre de loi devait être modifié à distance courte suivant la forme des particules des corps. Le débat cessait brusquement en 1749 lorsque Clairaut découvrit finalement la concordance du mouvement de l'apogée avec la loi simple du carré inverse (17). Toutefois prudemment, il ne concédait pas la victoire à Buffon en ce qui concerne la force à courte distance, et la forme de loi qui gouverne ce genre de force demeura inconnue jusqu'à fin du XVIII^{ème} siècle et attirait de plus en plus l'attention. Le commentaire de Laplace sur l'effet de la forme des particules individuelles dans la loi de force doit beaucoup en particulier à Buffon; cependant il est réticent vis-à-vis de son précurseur. Il n'y a pas de doute qu'il est aussi redevable à Clairaut, qui avait traité la réfraction et l'action capillaire d'une façon mathématique qu'il aurait sûrement approuvée (18). Il y a donc de toute évidence une continuité entre Laplace et au moins un genre newtonien au XVIII^{ème} siècle qui avait de solides disciples en France, et le degré de continuité est tellement fort qu'il est possible de penser que Laplace ait simplement apporté un ensemble d'idées qui étaient auparavant plutôt disparates. Cependant son exposé de la gamme des phénomènes pouvait être traités en terme de force moléculaire, même s'il est donné en 1796 de façon certainement plus compréhensible que tout ce qui a été fait préalablement; et cet aspect de la force à courte distance auquel on a renouvelé une attention directe, a contribué à l'élaboration de la physique terrestre et céleste qui pouvait résulter de recherches précédentes. Avant tout, il regarde en avance le travail futur, et fournit une manière d'un programme de recherche. Ce ne fut qu'en 1805 que la publication du quatrième volume du traité de mécanique céleste transforme le rapport bref et formel de Laplace de 1796, et forge le véritable style laplacien. Il semble décisif si l'on veut comprendre cette transformation que jusqu'en 1805 Laplace avait un rapport étroit avec Berthollet, allié influent et ami intime depuis le début 1780, qui habita la maison voisine au village d'Arcueil à partir de 1806 et qui connaissait la chimie en langage newtonien que Laplace utilisait plus particulièrement en physique.

Dans la recherche des lois de l'affinité en 1801 beaucoup plus largement dans *l'essai de statique chimique* de 1803, Berthollet estimait que l'affinité chimique était le résultat de la force attractive entre les particules de la substance.

Bien sûr, en mettant cette idée en avant, Berthollet n'a pas fait preuve d'originalité. Cette idée est un acquis direct de la tradition newtonienne de l'affinité chimique qu'avaient hérité les newtoniens anglais comme Keills et Hauksbee, et en France Buffon, Macquer, Guyton de

16) A.C. Clairaut, *op.cit.*, à la note (14), pp.337—339.

17) "Avertissement de M. Clairaut sur le système du monde dans les principe de l'attraction", *Memoires de l'Académie Royale des Sciences* Pour 1745, 577—578, date du 17 mai 1749.

18) Voir Clairaut, "Sur les explications cartésiennes et newtonienne de la réfraction de la lumière", *Memoire de l'Académie Royale des Sciences* pour 1739, 259—275. L'action capillaire provient de sa *Théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrostatique* (Paris, 1743), pp.105—128.

Morveau et Lavoisier etc. Mais dans ses écrits sur l'affinité, Berthollet comme Laplace a répété trop de fois une vue conventionnelle, ni Berthollet ni ses disciples n'ont pas réussi la détermination systématique de l'affinité chimique que les chimistes newtoniens avaient vue comme leur but. Sa reconnaissance de la difficulté de la tâche le découragea plus qu'il ne l'encouragea. Mais par sa réaffirmation rigoureuse et décisive des principes newtoniens, il a réussi à créer un système cohérent et en laissant le programme comme futur travail de recherche, ce qui était auparavant plutôt un agrégat d'une vague conviction. Effectivement, Berthollet fut l'un des derniers qui tenta de réaliser le rêve newtonien de la chimie quantifiée, basée sur la mesure des forces entre particules. Cet essai de Berthollet, certainement l'un des plus distingués, devint obsolète par la nouvelle approche de la chimie incitée par la théorie daltonienne de l'atome. En tout cas, son importance fut grande en motivant la recherche chimique et contribuant à l'élaboration de nouveaux concepts durant l'époque napoléonienne. On peut voir immédiatement son influence :

- (1) Laplace a publié en détails sur la force moléculaire deux ans après la statique chimique.
- (2) Ce travail coïncide avec celui de l'Abbé René Just Haüy qui développa son modèle de réaction acide-base, en termes de force moléculaire à courte distance, trois ans après la statique chimique.

Il y a aucun doute qu'avant 1805, Laplace avait une conception claire de son programme de science physique. Les deux suppléments du volume IV publiés en 1806 et 1807 respectivement, indiquent que Laplace avait formulé l'idée de base de la réduction de tous les phénomènes physiques à un système de particules distribuées densément et exerçant des forces attractives et répulsives à distance. Dans ses débats au sujet de son programme, Laplace explique le traitement mathématique de la réfraction optique et de la capillarité sur la base de l'existence de forces à courte distance qui avait été postulée par Newton et discutée très souvent au cours du XVIII^{ème} siècle. Dans le cas de l'action capillaire, ces forces étaient supposées exister entre les particules de substance ordinaire; dans le cas de l'action de la réfraction, elles étaient supposées entre particules de substance ordinaire et particules impondérables de lumière. Le choix de Laplace de la réfraction optique et de l'action capillaire comme sujets de sa première intrusion dans le royaume de la physique moléculaire, révèle clairement sa prédiction (en faveur de l'existence de ces forces à courte distance) à cette étape de son travail. De plus, ces types de phénomènes avaient suscité des problèmes encore non résolus en 1805. En particulier, le traitement de la réfraction avait montré la difficulté de l'étude des forces moléculaires correspondantes et n'avait donc pas pu être entrepris rigoureusement, même si son intérêt avait paru évident aux newtoniens. Même la théorie de l'action capillaire de Clairaut, quoique brève et incomplète, constituait pour Laplace le seul socle valable pour une discussion sérieuse. Au contraire, l'étude de Laplace de ces deux thèmes était longue et compréhensible.

Le problème de la découverte de la loi dirigeant la force moléculaire par rapport à la distance, demeurerait dans le même état après la controverse sans issue entre Clairaut et Buffon soixante ans auparavant, et n'avait pas été résolu par la *Mécanique céleste*; cependant la démonstration de Laplace que la forme de la loi n'était pas importante a au moins eu le mérite de combler un vide et de faire paraître la situation moins scandaleuse; c'était un

triomphe mineur. Mais, dans la tête de Laplace, il y avait manifestement quelque chose de plus à achever que les questions de la réfraction et de la capillarité; bien plus qu'une simple péripétie dans ses activités scientifiques, il paraît, entre 1805 et 1807, s'être plongé totalement dans le problème de la physique moléculaire. A cette époque, il a fait part de ses travaux sur l'action capillaire par cinq fois dans les notes de l'Institut et engage les autres dans l'expérimentation en vue de recouper sa théorie et d'en agrandir les champs d'application. Par exemple, Haüy, l'ingénieur parisien Jean-Louis Trémery et Joseph Gay-Lussac, le jeune protégé de Berthollet, étaient chargés de poursuivre l'expérimentation sur la capillarité; Jean Baptiste Biot, peut-être le disciple le plus proche de Laplace à l'époque, était choisi pour poursuivre les expériences relatives à la réfraction dans les gaz qui avait été proposées à l'Institut par Laplace.

Pendant la période d'ascension de puissance de Napoleon Bonaparte comme premier consul en 1799 jusqu'à sa chute en 1815, époque généralement considérée comme une des plus glorieuses de toute l'histoire des sciences françaises, c'était Laplace qui marquait les sciences de sa personnalité, qui se montrait comme le chef de file le plus brillant depuis le début de la formalisation de la physique. Donc, le travail de Laplace sur l'action capillaire, situé dans le contexte hautement caractéristique de la physique laplacienne concernant les systèmes impondérables en théorie de la chaleur, en lumière, en électricité, en magnetisme, était l'essai de raffinement et de quantification de la théorie des impondérables dans laquelle la physique laplacienne a trouvé sa plus remarquable réussite.

3. L'attitude d'analyse de Laplace face aux applications.

On peut décrire l'attitude générale de Laplace en privilégiant trois étapes dont l'ordre constitue non pas un programme strictement articulé, mais au moins une référence globale.

Figeons-les pour le bénéfice de l'analyse (19).

- (1) Posés par l'observation et l'inventaire du monde réel, il existe des problèmes qui sont susceptibles d'être mathématisés et donc qui peuvent être traités rigoureusement.
- (2) Ces problèmes suscitent éventuellement la découverte des outils analytiques perfectionnés permettant de les aborder d'une manière scientifiquement acceptable: autrement dit, le besoin d'explication analytique crée la fonction d'abstraction.
- (3) Obtenus à des fins pratiques d'investigation scientifique, ces outils mathématiques présentent quasi nécessairement d'autres avantages que ceux initialement envisagés pour les forger; lorsqu'ils ont fait leurs preuves, il ne faut donc pas se contenter de les admirer, mais tenter de les utiliser systématiquement.

Une conception aussi rigoureusement organisée devint celle du Laplace de la maturité. Comme on a vu dans les pages précédentes, ce furent apparemment les années 1783-1785 qui marquèrent chez Laplace un tournant; il commença l'application des mathématiques au domaine physique. Je schématise ici les trois points de Dhombres concernant la méthode de Laplace:

Observation → Analyse → Généralisation ou (Synthèse)

19) Jean Dhombres, "La théorie de la capillarité selon Laplace : Mathématisation superficielle ou étendue?", *Revue d'Histoire des Sciences* 62 (1989), 44-45.

4. Rôle d'une certaine analogie.

L'élégance de Laplace fut de ne pas favoriser la première solution sans toutefois faire fond sur la deuxième. Bref, il prit une voie originale, celle d'une explication de la capillarité par analogie avec la théorie de la gravitation, sans donc chercher à faire dériver la première de la seconde. L'analogie que Laplace utilisait n'était nullement conceptuelle (masses de la gravitation contre molécules de la capillarité !). Mais elle relevait du calcul, donc elle appartenait à l'ordre et à la langue mathématique. Voici, délibérément, une démarche scientifique à la condillacienne, pourrait-on penser (20). Ce serait trop vite dit et ce serait surtout donner trop d'influence à la manière de ce philosophe français, empiriste et sensualiste qui a pris une période de gloire était bien rejeté en France vers 1800. Certes, l'analogie que recherchait Laplace pouvait être en partie lexicale, précisément grâce au calcul; et nous verrons que la mathématisation remplacera partout la fonction $(\frac{1}{r^2})$ de la gravitation par une fonction à priori, plus générale ϕ . Mais cette seule analogie marquait de point de démarrage. Et c'était là que résidait l'indigence de l'explication condillacienne. Si deux phénomènes physiques possédaient suffisamment de traits communs, il était naturel de les évaluer mathématiquement de la même façon. Mais où pouvait résider l'analogie entre la capillarité et la gravitation ?

Dans la notion de force attirante ? Ce serait un bien faible levier, et apparemment contradictoire avec l'expérimentation comme Brisson semblait l'indiquer. Laplace vit que l'analogie tenait à la forme même du phénomène capillaire. Il comprit l'importance d'un fait que tous les autres observateurs avaient considéré comme effet secondaire et en tout cas ne requérant pas en premier lieu une explication. L'eau, dans un tube capillaire, ne présentait pas à son apex une surface plane, mais une surface incurvée vers le bas, comme une coupelle en forme de calotte sphérique. Cette indication physique-presque comme le constat d'une expérience plus pensée que réalisée-nous oblige à mesurer *ab ovo* (dès le début) toute l'intuition physique à l'oeuvre chez Laplace et à ne pas laisser abuser par l'amoncellement des calculs analytiques. De fait, dès sa lecture de son premier mémoire le 23 décembre 1805, il indiquait "la vraie cause de l'ascension ou de l'abaissement des fluides". Cette vraie cause tenait à la concavité et à la convexité de la surface du fluide dans un tube. Ménisque concave dans le cas de l'eau, il y avait élévation et ménisque convexe, dans le cas du mercure, il y avait abaissement. C'était apparemment ce lien entre une forme et ce phénomène d'élévation ou abaissement qui entraînait Laplace dans son calcul.

II. Elaboration de la théorie de Laplace

1. Les calculs: à partir de l'action d'une couche sphérique sur un point attiré.

Le premier calcul de Laplace, fruit de son labeur en *Mécanique céleste*, était quasiment d'ordre géométrique. Il s'agissait de répondre à la question suivante: quelle est

20) Voir, par exemple, J. Dhombres, La langue des calculs de Condillac, ou comment propager les lumières?, *Science et Technique en perspective* 2 (Nantes, IREM, 1982 – 1983), 197 – 230.

quantitativement s'entend, l'attraction qu'exerce une sphère (composée d'un seul fluide) sur un tube (capillaire fluide) porté perpendiculairement à celle ci, pour bien indiquer combien ce problème était libre de toute entrave physique, j'ai mis entre parenthèses les termes faisant référence au réel (21). Naturellement ce calcul ne pouvait démarrer sans que des hypothèses fussent faites quant à la nature de l'attraction. Deux hypothèses seulement étaient indiquées, portant sur la force exercée par les différentes particules de matière :

(1) la force ne dépend que de la distance séparant le point attiré (dans le tube) de la particule agissante (réduite à un point) située dans le fluide de la sphère. Cette force est dirigée suivant la droite joignant les deux points. Elle est en outre proportionnelle à la masse de la particule attirante.

(2) la force est quasiment nulle dès que la distance entre le point et la particule est notable.

Il était patent que la première hypothèse laissait espérer que les méthodes mathématiques utilisées en théorie de la gravitation allaient fonctionner de même en capillarité. C'était opérer une généralisation naturelle dans l'ordre mathématique, à partir du cas d'une force en $(\frac{1}{R^2})$. La deuxième hypothèse était un garde-fou qui fournissait un moyen de négliger des termes. En d'autres mots, le calcul prévoyait *a priori* une technique d'élimination, comme en calcul infinitésimal on dispose de l'élimination des termes du second ordre. Cela nous rappelle en chimie quantitative, l'étape de décantation des ions complexes pour obtenir un produit pur. Toutefois pour mettre en place cette méthode d'élimination, il fallait faire intervenir un ingrédient nouveau, d'ordre spécifiquement mathématique, et que l'on peut qualifier de méthode fonctionnelle. Celle-ci n'avait pas de raison d'être pour la théorie usuelle de la gravitation, puisque la forme explicite et quantitative de la force était donnée d'avance. Mais précisément, une réflexion dépassant les seuls calculs liés à la théorie de la gravitation avait montré que dans cette théorie intervenaient des approximations liées à des intégrales et que la forme explicite de la force était souvent illusoire ; on pouvait donc espérer transposer une technique d'approximation de mécanique céleste à un autre domaine.

A priori, Laplace posait comme fonction $\phi(r)$ la valeur de l'attraction "capillaire" entre deux molécules, en fait dépendant de la seule distance r entre les deux points. Cette fonction était inconnue et si l'espoir pouvait souvenir d'une détermination précise grâce à l'adéquation des résultats théoriques avec les résultats expérimentaux, le premier temps du calcul devait être tel qu'il éliminât ϕ des équations en jeu. L'hypothèse (2) était prise à cet effet. Mais la marge dans la quelle Laplace inscrivait son entreprise n'était donc pas très large et le calcul s'il devait faire feu de tout bois, ne pouvait omettre la règle d'élimination de ϕ .

Le modèle gravitationnel du calcul recélait une troisième hypothèse implicite, celle qui consistait à considérer tous les points inclus dans un volume différentiel de la sphère fluide (volume infiniment petit) comme agissant un seul point, situé en son centre et capitalisant toute la masse du volume. Ce modèle permettait évidemment l'emploi du calcul différentiel puisqu'ensuite il suffisait d'additionner les forces produites par de tels éléments différentiels

21) J. Dhombres, *op.cit.*, à la note (19), 55-63.

en calculant des intégrales. En fait, la force était conçue, *a priori*, comme s'exerçant entre masses ponctuelles; c'était avant tout une donnée mathématique susceptible du traitement par calcul différentiel et intégral. En tout cas, la dissymétrie de traitement entre un volume différentiel dans la sphère d'une part et un point de l'autre dans le tube, évitait toute intervention que la discussion de l'hypothèse d'une constitution moléculaire de la matière. Le modèle était mathématique, qui ouvrait la porte au calcul; son fondement physique n'était pas mis à l'épreuve et c'était en quelque sorte le prix à payer pour la mathématisation.

On peut penser que l'usage de la méthode fonctionnelle, c'est-à-dire l'introduction de la fonction inconnue ϕ , reposait sur l'hypothèse physique raisonnable d'une "attraction qui cesse d'être sensible à une distance sensible", une expression apparemment trop vague pour un emploi mathématique, mais il n'est pas interdit d'évoquer un ordre inverse des opérations intellectuelles et on pourrait imaginer que cette hypothèse était justement faite *a priori* pour pouvoir écrire la fonction $\phi(r)$ et donc libérer le jeu fonctionnel. Cette fonction n'allait intervenir que sous une forme intégrale—telle était la contrainte du modèle en jeu—et il fallait bien pouvoir intégrer quelque chose, quand bien même l'intégration restait virtuelle, faute d'une expression connue ou imaginable de ϕ . Ce sont sur des intégrales que l'attention devait se porter, et sur des intégrales seulement. Nous allons bien voir que les véritables outils de Laplace furent de telles intégrales. Devançant cette description, nous pouvons dire que la technique mise en jeu fait irrésistiblement penser pour un moderne à la théorie des distributions, notamment la manipulation de la mesure de Dirac.

Si l'essentiel gisait dans le giron mathématique, remarquons malgré tout qu'écrire la fonction $\phi(r)$ n'était pas libre de toute conception physique puisque cette écriture revenait à supposer qu'aucun obstacle matériel venant à interférer entre la particule "attirante" et le point attiré n'était susceptible de modifier l'action de la force. L'exemple de la gravitation était le garant puisque Laplace énonçait :

Car il est naturel de penser que les attractions capillaires se transmettent à travers les corps, ainsi que la pesanteur; cette action ne disparaît donc qu'à raison de la distance du fluide à ces couches; d'où il suit que l'attraction du verre sur l'eau n'est sensible qu'à des distances insensibles. (22)

Il ne donnait aucune autre justification d'ordre physique, sinon cette analogie avec le traitement de la pesanteur, et n'était nullement embarrassé pour indiquer qu'il s'agissait que l'action capillaire de la montée de l'eau dans un tube droit ne semblait expérimentalement pas dépendre de l'épaisseur de verre de tube, mais seulement de son diamètre intérieur. Par conséquent, les parties de verre éloignées de la surface intérieure du tube étaient sans effet. De cette constatation, on pouvait déduire deux choses; soit que les parties de verre plus proches annihilent l'effet des parties plus éloignées, soit que l'action capillaire était fonction de la seule distance, mais sensible seulement "à des distance imperceptibles". Laplace adaptait sûrement le deuxième point de vue, parce que ce dernier avait l'avantage de le laisser en présence d'une configuration géométrique seulement et évitait tout embarras liés à la constitution intime de la matière. L'aspect moléculaire n'était pas privilégié, mais bien plutôt

22) P.S. Laplace, Premier supplément de *Mécanique céleste*, vol IV (Paris, anVIII ; reimprimé, Bruxelles, 1967), p.3.

la géométrie.

Ceci pose, l'empire de l'analyse était total dans le calcul lui-même. L'action d'attraction d'une cellule différentielle située en N dans la couche sphérique, sur le point M, était décomposée suivant la droite OM (distance du centre sphéroïde à un point attiré) et une direction orthogonale. L'idée était de ne calculer que selon OM, puisque les forces orthogonales à OM une fois sommées, se détruisaient par symétrie sphérique. Laplace utilisait bien son habilité de calculateur en mécanique. Cette action était de la forme (avec les notations modernes)

$$[1] \quad dF(V, \pi(f)) = dV \times \pi(f) \times \cos\theta,$$

D'où l'élément de force est le produit de l'élément du volume, par la densité de force attractive $\pi(f)$, $\cos\theta$ étant la projection sur OM.

Cet élément de force (action de l'élément de la couche sur le point attiré selon Laplace) était fourni par l'analyse menée dans le livre II de la *Mécanique céleste* d'où l'on comprend que la force capillaire est empruntée à l'attraction planétaire.

Regardons le numéro 10 du livre II page cent trente cinq. Laplace considère l'action d'une couche sphérique comme idée de base de l'action capillaire:

Chaque corps céleste étant la réunion d'une infinité de molécules douées d'un pouvoir attractif, et ses dimensions étant très-petites relativement à sa distance aux autres corps du système du monde (23);

C'est ainsi que Laplace utilise les outils qu'il avait introduits. (Voir premier supplément de *Mécanique céleste* page 11). Il s'agit bien d'adaptation à l'échelle moléculaire d'un procédé issu de travaux à l'échelle planétaire. Reprenons l'étape du premier supplément de *Mécanique céleste*. On peut voir immédiatement les effets de l'idée newtonienne, extrêmement forts dans le cœur de Laplace: la loi universelle gouverne tous objet de l'"échelle".

$$\text{Laplace introduit aussitôt l'intégrale} \quad \int_0^\infty df \phi(f) = c - \pi(f)$$

donc $u^2 du d\omega d\theta \sin\theta (c - \pi(f))$, (d'où θ est le complément triangulaire)

de sorte que $c - \pi(f)$ fût une quantité positive et que $\pi(f)$ fût vite décroissante:

En éliminant la constante C, il indiquait alors que l'action fournie par [1] n'était autre que la dérivée partielle en r de l'expression, donc aussi bien celle de

$$[2] \quad -u^2 du d\omega d\theta \sin\theta \pi(f)$$

C'était là le point essentiel de sa mathématisation de ce phénomène physique en éliminant la valeur insensible. Compte tenu de cette dérivation, il faut bien prendre conscience que le calcul dès le départ était mené de sorte que la fonction ϕ n'apparut plus que sous cette forme intégrale $\pi(f)$, pour étendre cette fonction à la couche entière, en ω de 0 à 2π qui donnait l'action en M, projetée suivant OM, de la couche différentielle circulaire d'épaisseur du, autrement dit force de l'anneau cylindrique. Elle s'exprimait comme la dérivée partielle en r de l'expression.

$$[3] \quad -2\pi u^2 du d\theta \sin\theta \pi(f), \text{ or, } \sin\theta = \left(\frac{1}{ru} \right) f \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

De sorte que l'intégration en θ , de 0 à π cette fois, fournissait l'action en M suivant OM de la couche sphérique comme dérivée partielle en r de

$$-2\pi u^2 du d\theta \sin\theta \pi(f) = -2\pi \left(\frac{u}{r}\right) du \int f df \pi(f)$$

A nouveau, Laplace représentait l'intégrale comme une différence

$$\int f df \pi(f) \text{ par } c' - \psi(f)$$

Il y parvenait au terme d'un changement de variable, en remplaçant r et θ par f et θ . De plus puisque pour $\theta=0$, $f=r-u$, où u est la valeur de ON et que pour $\theta=\pi$, $f=r+u$, donc l'expression [3] devient

$$[4] \quad -2\pi u^2 du \int d\theta \sin\theta \pi(f) = -\frac{2\pi u du}{r} \{\psi(r-u) - \psi(r+u)\}$$

Finalement l'action en M suivant OM de la couche sphérique d'épaisseur dU en était la dérivée partielle en r (24).

C'est-à-dire la droite OM, d'une valeur $r=b$ à une valeur R , il suffisait d'intégrer selon r , autrement dit de prendre la différence entre les valeurs [4] calculées en $r=R$ et $r=b$, soit l'expression

$$2\pi \left(\frac{u}{b}\right) du \{\psi(b-u) - \psi(b+u)\} - 2\pi \left(\frac{u}{r}\right) du \{\psi(r-u) - \psi(r+u)\}$$

L'hypothèse [2] faite sur ϕ de l'insensibilité à la valeur sensible intervenait pour éliminer les 3 termes

$\psi(b+u)$, $\psi(r-u)$, $\psi(r+u)$, ne laissant plus subsister que la première et faisant ainsi disparaître l'intervention de la valeur r (qui pouvait être infinie)

$$[5] \quad 2\pi \left(\frac{u}{b}\right) \psi(b-u)$$

Pour conclure, il ne restait plus à Laplace qu'à calculer l'action toute entière de la boule sphérique de rayon b , donc à intégrer l'expression précédente en u entre $u=0$ et $u=b$ soit l'intégrale

$$[6] \quad 2\pi \int_0^b \left(\frac{(b-z)}{b}\right) dz \psi(z)$$

où est supposé $z=b-u$

Cette expression donnait évidemment toute l'action en M puisque pour des raisons de symétrie, celle-ci était nécessairement dirigée suivant OM.

$$2\pi \int_0^b \psi(z) dz - \left(\frac{2\pi}{b}\right) \int_0^b z \psi(z) dz$$

puisque l'hypothèse [2] utilisée à nouveau permettait de considérer

$$\int_0^b \psi(z) dz \text{ et } \int_0^b z\psi(z) dz \text{ comme}$$

égales respectivement à

$$K = 2\pi \int_0^b dz\psi(z)$$

$$H = 2\pi \int_0^b z dz\psi(z)$$

donc comme indépendantes de b ; Laplace disposait enfin des résultats de l'action de la boule sphérique sur une demi-droite radiale, extérieure à la sphère de rayon b .

Elle avait la forme

$$[7] \quad K - \frac{H}{b}$$

Les grandeurs de K et H qui interviennent ne dépendent plus, quant à elles, du rayon b . L'important était bien d'avoir éliminé la fonction ϕ , ou plutôt de l'avoir intégrée sous forme des constantes K et H , cette dernière H étant d'ailleurs bien inférieure à K comme on pouvait le voir aussitôt grâce à l'hypothèse [2] et à la présence de Z sous l'intégrale définissant H . Bien sûr, ce serait ultérieurement à l'expérimentation de préciser les valeurs de K et H . Mais ce stade n'était pas encore abordable, car il fallait d'abord interpréter le calcul, apparemment aux antipodes d'une explication de la capillarité puisque l'on avait d'une part une sphère liquide, de l'autre une demi-droite. Malgré tout Laplace réussit à avoir une forme mathématique simple, qui contient deux expressions implicites; la pression et la tension.

2. Liaison mathématique et physique; La pression, la tension et les symétries.

Le calcul précédait en effet une dissymétrie gênante. Laplace sommait des forces d'action, *a priori* inconnues, et un nombre infini bien sur, en provenance de volumes différentiels répartis dans une boule, mais par contre agissant sur des points répartis sur une demi-droite. D'un côté figurait une répartition volumique, de l'autre il y avait une répartition linéaire! Il fallait trouver une explication, et celle-ci ne pouvait pas se trouver en faisant appel à l'hypothèse moléculaire. Un recours à l'interprétation habituelle, plutôt continuiste de l'hydrodynamique, permettait de sauver la mise.

En calculant l'action en des points réparties sur une droite, Laplace estimait avoir déterminé une "pression".

Cette interprétation permettait effectivement à Laplace de bénéficier avantageusement de son calcul; il passait d'une valeur d'attraction établie sur un objet de pensée, un tube rectiligne sans épaisseur, à une quantité physique classique en hydrostatique, la notion de pression qui s'exerçait sur une unité de surface. Nous voyons là à l'oeuvre, une pensée physique capable de qualifier à volonté un objet de l'arsenal mathématique. Du coup, avec cette signification imposée et non négociée, le coefficient K trouvait son interprétation immédiate

en faisant $b = +\infty$ dans (7), c'est-à-dire en remplaçant par un demi-plan. Il s'agissait tout simplement dans ce cas de la pression exercée sur une surface plane. Dès lors la constante H rendait compte de la pression due à la forme sphérique. Là encore, Laplace jouait habilement de l'interprétation physique des deux termes de la somme dans l'expression [7]. Cette distinction et la comparaison des constantes H et K pouvaient avoir des conséquences méthodologiques quant à la théorie chimique des affinités dont rendait compte le terme constant K , parce que la tension superficielle s'exprimait par le terme de H .

Il revenait en 1819 sur la même idée : le calcul mathématique, par les intégrales H et K , distinguait "les phénomènes chimiques des phénomènes capillaires" (25). Bien sûr, Laplace engrangeait encore de la physique puisqu'il indiquait que comptait dans le terme en H la forme sphérique du seul voisinage de la base du tube fin. Tel était encore l'effet de l'hypothèse [2]. Le calcul prenait donc en compte le cas d'un ménisque sphérique, le reste du fluide pouvant être ailleurs de forme quelconque.

A nouveau, Laplace devait faire appel à la physique du moins à un argument de symétrie et d'équilibre. Il estimait pouvoir déduire du calcul précédent l'action d'une sphère symétrique. Laplace trouvait pour cette action $K + H/B$. Bref, il obtenait la pression sous la forme $K \mp H/B$ suivant que le ménisque sphérique était concave ou convexe. La géométrie était bien au rendez-vous.

3. Le cas général était réglé par une équation aux dérivées partielles.

C'était naturellement en revenant aux mathématiques que Laplace pouvait envisager le cas d'un ménisque de forme générale et non réduit à la seule forme sphérique. Il faisait pour cela intervenir "l'ellipsoïde osculateur", qui lui paraissait le seul à retenir, compte tenu de la forme en u/b de l'intégrale donnant H . Naturellement l'ellipsoïde osculateur était défini, parmi toutes les surfaces du second degré, comme celui qui avait avec la surface du ménisque le meilleur contact, entendu au sens du calcul différentiel. Le mot "ellipsoïde" était à prendre au sens large. De fait, c'était Euler qui en 1760 avait bien établi la théorie de la courbure sur les surfaces (26) reprise par Meusnier (27), un élève brillant de Monge qui lui-même en 1795, banalisait ces considérations par la publication d'un manuel (28). On préférerait parler alors des sphères osculatrices et distinguer les deux rayons de courbure extrêmes (29).

Il faut cependant noter que pour le calcul de l'action du fluide sur le tube, l'assimilation de l'ellipsoïde osculateur à la surface nécessitait une preuve, celle revenant à expliquer que les

25) P.S. Laplace, "Considération sur la théorie des phénomènes capillaires", *Journal de Physique* 89 (octobre 1819), 292–296 (*Oeuvre complètes*, t. XIV, 259–264). Lu à l'Institut le 13 septembre 1819, *Procès-verbaux des séances de l'Institut*, VI, 487.

26) L. Euler, "Recherches sur la courbure des surfaces", *Mémoires de l'Académie de Berlin* 16 (1760), 119–143. Voir *Opera omnia*, Series 1, t. 28, pp. 1–22.

27) J.B. Meusnier, "Mémoire sur la courbure des surfaces", *Mémoire de mathématique et de physique présentés par divers savans... (savans étrangers)* 10 (1785), 477–510.

28) G. Monge, *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie* (Paris: Ecole polytechnique, 1795; 2ème ed., Paris, 1801).

29) S.F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. 1 (Paris 2ème ed., 1810), pp. 556–582.

termes omis étaient de fait négligeables, d'un ordre de grandeur bien inférieur. Laplace, s'il n'avait rien dit d'abord, fut plus loquace ultérieurement.

Regardons ici les passages sur l'ellipsoïde osculateur aux premier et deuxième supplément de *Mécanique céleste*. Laplace concevait un ellipsoïde osculateur sur une colonne fluide intérieure, enfermée dans un canal infiniment étroit, perpendiculaire à un point quelconque de cette surface (30). Ensuite il déduit l'action d'un corps de figure quelconque en vue de la détermination de la surface de l'eau renfermée dans un tube de figure quelconque (31). Aussitôt il insère l'équation différentiel d'Euler-Lagrange qui permet définir les rayons osculatrice à l'équation de l'équilibre de fluide renfermé dans un tube (32). Laplace étendait l'ellipsoïde osculateur par parabolioïde osculateur en proposant de suivre une nouvelle voie pour découvrir la forme de la surface capillaire (33). Prenons en détail les étapes essentielles de démarche de la combinaison entre l'expression géométrique (courbure des courbes sur les surfaces) et l'expression de la physique (pression et tension).

Une fois l'ellipsoïde osculateur en place, retour était fait à la physique. L'argumentation de Laplace abandonnait pourtant l'idée de pression pour revenir au calcul de l'action; il effectuait un découpage en tranches à partir d'un plan pivotant selon un angle θ autour de l'axe de la colonne fluide et orthogonal à la surface du ménisque. Chaque plan découpe une ellipse sur l'ellipsoïde osculateur et chaque tranche d'ellipsoïde était censée agir sur la colonne fluide d'une façon proportionnelle à sa masse. Or une telle tranche en $d\theta$ devait agir de la même façon que la tranche analogue d'une sphère dont le rayon était fourni par le rayon de courbure de l'ellipse d'intersection. Cette assimilation "différentielle" était admise sans vergogne. Bref, l'action d'une tranche d'ellipsoïde était connue grâce au calcul déjà effectué sur la sphère. Mais réduit par proportionnalité à une seule tranche sous la forme:

$$[8] \quad (K + H/B)d\theta / 2\pi$$

où B désigne le rayon de courbure de la section plane faisant l'angle θ .

Pour connaître l'action totale, il fallait intégrer en θ de θ à 2π , sachant grâce à la géométrie différentielle que

$$[9] \quad \frac{1}{B} = \left(\frac{1}{b}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{1}{b'}\right)\sin^2\theta$$

où b et b' sont les rayons de courbure des sections principales de l'ellipsoïde. Des lors, l'action devenait après une simple intégration:

$$[10] \quad K + \frac{2}{H} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} \right)$$

Avec ces formules, le flair du mathématicien était en éveil. Laplace montrait aussitôt que la somme $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ des inverses des rayons principaux pouvait se calculer à partir des rayons de courbure de deux sections planes quelconques, à condition de les prendre

30) P.S. Laplace. premier supplément de *Mécanique céleste*. p.16.

31) *Ibid.*, p.18.

32) *Ibid.*, pp.10-21.

33) P.S. Laplace, deuxième Supplément de *Mécanique céleste*, pp.3 et 7.

orthogonales. C'est-à-dire calculées en θ et $\theta + \frac{\pi}{2}$. Finalement, il concluait en se débarrassant de toute formule mathématique (34).

En effet, il suffisait maintenant d'écrire l'équilibre de toutes les pressions en jeu puisque l'action sur un tube était assimilée à une pression. Laplace se donnait la liberté d'évoquer deux méthodes possibles, toutes deux utilisées auparavant en hydrostatique, bien que la deuxième fut inapplicable en l'état premier de son calcul. La première méthode—basée sur une sorte d'intégrale première avançait un principe d'équilibre dans un canal curviligne (35).

La deuxième méthode revenait à exprimer la force agissant sur le fluide à l'équilibre et à la poser comme orthogonale à sa surface libre. Pour appliquer cette dernière méthode en un point quelconque de la surface du liquide, Laplace estimait insuffisant son calcul car les forces de pesanteur lui paraissaient être du même ordre de grandeur que celui des forces de capillarité qui avaient été négligées lors de l'assimilation de la surface du ménisque à l'ellipsoïde osculateur; il manquait au calcul une étape d'interintégration, contrairement à ce qui se passait si l'on utilisait les pressions. L'embarras de cette seconde méthode resta cependant sur la conscience de Laplace et il allait longuement y revenir. Pour Laplace, les mathématiques ne pouvaient être un simple artifice; si deux méthodes se présentaient, il importait d'établir l'identité tant des résultats que des principes (36).

Il s'employa ultérieurement à établir cette identité entre les deux méthodes possibles, aboutissant cette fois par différentiation de l'équation de l'équilibre [11].

$$[11] \quad K - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + gz = K - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} \right)$$

C'est à de telles façons que l'on se doit de constater chez Laplace un double esprit, physique et mathématique. Parce qu'il avait pu surmonter la difficulté de la deuxième méthode, assure grâce à la première méthode de ne pas être dans l'erreur, Laplace pouvait se lancer dans l'étude de la montée de l'eau dans un tube prismatique. Cette étape se révélait particulièrement intéressante parce qu'elle enjoignait la réalisation d'expériences sur la montée de l'eau dans un coin capillaire (38).

La seconde méthode grâce aux forces qu'elle énumérait avait aussi l'avantage de renouer avec la notion de tension superficielle que Segner avait avancée une cinquantaine d'année plus tôt (39). C'est cette seconde méthode que l'on choisit volontiers aujourd'hui dans l'exposé moderne (40).

Faute de place nous ne l'évoquerons pas, mais nous retiendrons que la tension superficielle, dans un liquide, était chez Laplace une notion dérivée, non un point de départ.

34) P.S. Laplace, *op. cit.*, à la note (30), p.18.

35) *Ibid.*, p.8.

36) P.S. Laplace, deuxième supplément de *Mécanique céleste*, p.3.

37) P.S. Laplace, *op.cit.*, à la note (22), p.19.

38) P.S. Laplace, deuxième supplément de *Mécanique céleste*, pp.22—23 et 30.

39) T.A. Von Segner, *Commentarii Societ. Regiae Scientiarum Gottingensis*, I (1751), p.301.

40) H. Bouasse, *Capillarité, Phénomènes superficiels* (Paris: Delagrave, 1924), p. 13; W.J. Moore, *physical chemistry*, 4ème édition (London: Prentice-Hall Int., 1978), pp.477—478; R. Debay, I. Prigogine, A. Bellman and D.M. Everett, *Surface tension and absorption* (London: Longmans, 1966), p.4.

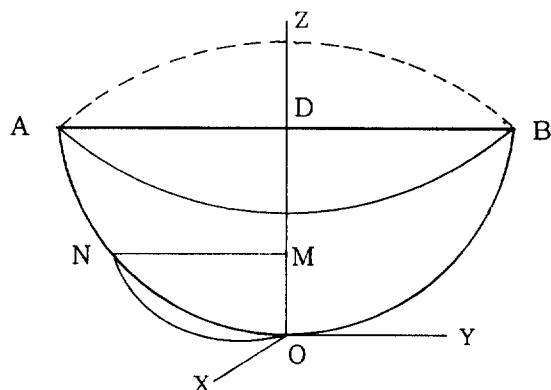


Figure 1

Regardons avec Laplace la première méthode, celle qui enonçait que les pressions aux deux extrémités d'un canal curviligne joignant deux points de la surface libre du liquide étaient égales. Si AOB est la forme supposée réalisée de la surface fluide, N le point courant situé à une élévation Z de O , point pris comme étant le plus bas ($OM=Z$), l'équilibre suivant le canal NSO obligeait à avoir l'égalité de l'équation [11].

où g la pesanteur, R et R' les rayons de courbure principaux en N de la surface du liquide, et b et b' ces mêmes rayons au point le plus bas O . Comme R et R' sont liés à l'équation de la surface AOB, par l'intermédiaire des dérivées partielles de Z fonction de X et de Y , variables du plan AB, Laplace pouvait finalement exhiber l'équation aux dérivées partielles réglant tout le problème des surfaces d'équilibre en capillarité, à savoir

$$[12] \quad \frac{(1+q^2) \cdot r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} - \frac{2gz}{H} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

L'équation précédente devient ainsi:

$$[13] \quad \frac{\frac{d^2 z}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dz}{du} \left(1 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 \right)}{\left(1 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2gz}{H} = \frac{2}{b}$$

car au point O , b est égal à b' lorsque La surface est de révolution.

Dans l'équation de [13]

le terme $\frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ représente $\frac{1}{R'}$,

R' étant le rayon osculateur de la section de la surface par un plan passant par l'axe de révolution.

le terme $\frac{\frac{1}{u} \frac{dz}{du}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ représente $\frac{1}{R}$,

R' est l'autre rayon de courbure, ce rayon est égal à R perpendiculaire à la surface, prolongée jusqu'à sa rencontre avec l'axe de révolution.

Laplace aboutissait au résultat qui apparaissait comme le nec plus de toute théorie ; une équation aux dérivées partielles.

III. La résolution des équations aux dérivées partielles

La résolution de l'équation aux dérivées partielles non linéaire (12) terminait mathématiquement tout le problème. Mais il fallait tenir compte des conditions aux limites que Laplace énumérait aussitôt, il y avait d'une part la forme du tube capillaire mais d'autre part l'inclinaison des plans(41).

L'inclinaison de cette donnée était physiquement essentielle, mais elle n'en marquait pas moins une rupture dans le style apparemment géométrique de Laplace.

Effectivement, dans les premières pages de son texte, Laplace avait indiqué la raison de cette constance d'inclinaison des plans extrêmes ; il l'avait fait à partir de sa modélisation d'une action insensible à distance sensible, mais il l'avait fait sans calcul et d'ailleurs avant tout calcul. L'idée était qu'en regard de cette action, la paroi du tube devait être plane(42).

Au-delà de la sphère d'activité sensible de la paroi, le fluide était livré à la seule pensanteur et à son action sur lui-même(43). et le calcul allait alors assurer la sphéricité. En conséquence, le raccordement ne dépendait que de la matière du tube, et non de sa forme, mais il dépendait du fluide. C'était ce qui justifiait la constance des angles d'inclinaison.

L'avantage d'une telle conception était évidemment de permettre de réduire par la suite l'intervention de la physique(44).

La physique était apparemment reléguée dans un rôle d'établissement des seules conditions aux limites, une attitude qu'un esprit aussi analytique que celui de Laplace devait

41) P.S. Laplace, *op.cit.*, à la note (22), p.21.

42) *Ibid.*, p.4.

43) *Ibid.*, p.5.

44) *Ibid.*, p.5.

pleinement apprécier et qui fût adoptée aisément par nombre d'autres mathématiciens au cours des XIX^{ème} et XX^{ème} siècles. Ce faisant, Laplace qu'il oubliait les phénomènes de frottement qui auraient dû introduire quelques termes dans son équation aux dérivées partielles(45).

La constance d'inclinaison des plans extrêmes était cependant appliquée avec quelques subtilités car il ne s'agissait que des "premiers plans de la surface du fluid intérieur" (46), au-delà donc de la zone imperceptible d'action de la matière du tube lui-même. Celle-ci n'intervenait pas dans le calcul laplacien, ce qui est tout à fait notable et diffère d'un exposé moderne avec les tensions superficielles.

Laplace était d'ailleurs au courant de l'article de T. Young, pour en 1805 à Londres, qui manifestait cette constance d'inclinaison directement sur la paroi (47), mais Laplace s'en dégageait prestement car il l'estimait inexacte en certaines extrémités des parois, par exemple, aux angles dièdres d'un tube prismatique.

La résolution de L'équation[12], aboutit une équation simple en prenant seulement le premier terme. C'est-à-dire la hauteur(q) de l'élévation ou l'abaissement du fluide dans le tube est inversement proportionnelle au diamètre(l) de tube.

Telle était la loi de Jurin, autrement dit "*la différence de niveau varie en raison de inverse de diamètre du tube*"(48)

Laplace pouvait se livrer à une véritable débauche d'expériences, toutes issues de son équation aux dérivées partielles[12], qui répétons-le, ne faisait que rendre compte de la forme du fluide non seulement entre les parois des tubes cylindriques chevauchés mais aussi du mouvement d'une goutte d'eau prise dans un cône, dans un prisme, entre deux plans, entre deux plans d'intersection. La plupart des exemples de Laplace seront d'ailleurs repris et commentés par tous ses successeurs... jusqu'à Millikan calculant la charge de l'électron (49).

45) *Ibid.*, pp.5 – 6.

46) *Ibid.*, p.5.

47) T. Young, "An essay on the cohesion of fluids", *Philosophical Transactions* 1 (1805), 65; Young's *Miscellaneous Works*, vol.1(London: Murray, 1855).

48) P. Barchewitz, *Precis de physique d'après les théories modernes* (Paris:Doin, 1968), p.159.

49) J. Dhombres. *op.cit.*, à la note(19), p. 73.